Primjena stabala na problem spajanja. Kruskalov algoritam

Potrebno je izvršiti elektrifikaciju neke oblasti koju čini n naselja. Za svako $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ poznata je cijena c_{ij} troškova postavljanja direktne elektro-distributivne mreže između naselja i i j. Pitanje je: Kuda postaviti mrežu tako da ukupan trošak izgradnje bude minimalan?

Gornji problem ćemo modelirati problemom na težinskom grafu:

Definicija 1. *Težinski graf ili mreža je uređeni par* (G, w)*, gdje je* $G = (V, E)$ *(usmjeren ili neusmjeren) graf i* $w : E \to R$*.*

Za $e \in E$*,* $w(e)$ *je težina grane* e*.*

Ako je $Q = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$ *šetnja u grafu* G*, težina šetnje* Q *je*

$$w(Q) = \sum_{i=1}^{k} w(e_i)$$

Ako je $H = (V_H, E_H)$ *podgraf grafa* G*, težina podgrafa* H *je*

$$w(H) = \sum_{e \in E_H} w(e)$$

Pridružimo sada gornjoj mreži naselja težinski graf na sljedeći način: naselju i pridružujemo čvor v_i, svakoj grani $v_i v_j$ pridružujemo težinu $w(v_i v_j) = c_{ij}$. Elektro-distributivna mreža čiji je trošak izgradnje minimalan je razapinjuće stablo pridruženog težinskog grafa minimalne težine (*optimalno stablo*).

Kruskalov algoritam

korak 1. Odaberimao kariku (grana koja nije petlja) e_1 minimalne težine.

korak 2. Ako su do sada odabrane grane $e_1, e_2, \ldots, e_k$ biramo granu e_{k+1} tako da važi:

e_{k+1} je grana iz $E/\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ minimalne težine $w(e_{k+1})$ koja zadovoljava uslov $G[\{e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}\}]$ je acikličan graf.

korak 3. Stop kada se korak 2. više ne može izvršiti.

Dokazaćemo da ovaj algoritam daje optimalno razapinjuće stablo.

Kako je, na osnovu gore opisanih koraka, rezultujući graf maksimalni aciklični podgraf povezanog grafa G, on je sigurno razapinjuće stablo. Ostaje da dokažemo da je i optimalno. Pretpostavimo suprotno. Neka je T^* razapinjuće stablo konstruisano Kruskalovim algoritmom i neka je $\mathcal{T}$ familija svih optimalnih razapinjućih stabala. Pretpostavimo da su grane stabla T^* $\{e_1, \ldots e_{n-1}\}$, to jeste $T^* = G[\{e_1, \ldots e_{n-1}\}]$. Neka je $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{N}$ preslikavanje definisano na sljedeći način:

$$f(T) = min\{i | e_i \notin E(T)\}$$

Neka je $T' \in \mathcal{T}$ stablo na kome f dostiže maksimum i neka je $f(T') = k$. Tada je:

$$e_1, e_2, \ldots, e_{k-1} \in E(T') \wedge e_k \notin E(T.)$$

Iz osnovne teoreme o stablima slijedi da u grafu $T' + e_k$ postoji ciklus. Označimo ga sa $\mathcal{C}$. Tada postoji grana ovog ciklusa koja nije grana grafa T^*. Označimo je sa e'_k. Dakle, e'_k je grana stabla T' koja nije nije grana stabla T^* i e'_k leži na konturi u $T' + e_k$. Neka je sada $T" = (T' + e_k) - e'_k$. $T"$ je povezan graf i ima $n-1$ grana, to jeste $T"$ je razapinju'e stablo. Pri tome važi si sljedeće:

$$w(T") = w(T') - w(e'_k) + w(e_k) \leq w(T')$$

Kako je T' bilo optimalno stablo, to je i stablo $T"$ optimalno, pa $T" \in \mathcal{T}$. Sa druge strane, $f(T") \geq k+1$, što je suprotno našoj polaznoj pretpostavci da funkcija f maksimum dostiže na T'.